⋆

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$, et que dans ce cas p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
2) Montrer que si p est un projecteur, on a l'équivalence suivante pour tout vecteur x dans E :

$$x \in \mathrm{Im}(p) \Longleftrightarrow p(x) = x$$

   En déduire que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
3) Montrer que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$, et que dans ce cas s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

⋆

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $q = \mathrm{id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur.
   Exprimer dans ce cas $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
2) Montrer que $s = \mathrm{id}_E - 2p$ est une symétrie si et seulement si p est un projecteur.
   Exprimer dans ce cas $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

⋆ ⋆

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Montrer que l'intersection de $n - 1$ hyperplans de E est non nulle.

⋆ ⋆

Exercice 4

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sous espaces vectoriels de E et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de F.

1) Montrer que $f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$
2) Montrer que si f est injective et que la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
3) Montrer que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_p) \subset f^{-1}(F_1 + F_2 + \cdots + F_p)$
4) Donner un exemple dans lequel l'inclusion précédente est stricte.

⋆

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $F = \mathrm{Vect}\left(\cos_{|[0,\pi]}, \sin_{|[0,\pi]}\right)$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$.

1) Montrer que $E = F \oplus G$
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer $p(f)$ pour $f \in E$.

⋆

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $F = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$.

1) Montrer que $E = F \oplus G$
2) Soit s la symétrie de E par rapport à F dans la direction de G. Déterminer la matrice représentative de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⋆

Exercice 7

(ENS 2022) On considère l'ensemble

$$F = \left\{(x_1, ..., x_{2n} \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\right\}$$

et le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par le vecteur $u = (1, -1, 1, -1, ..., 1, -1)$.

1) a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Calculer sa dimension.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{2n}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

a) Donner le projeté de x sur F parallèlement à G

b) Donner le symétrique de x par rapport à F le long de G.

⋆

Exercice 8

Soit n un entier non nul. On note tr l'application trace définie par $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \mapsto \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{tr})$.

2) On considère $p \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ le projecteur sur $\text{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{tr})$. Que vaut $p(M)$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

⋆ ⋆

Exercice 9

Soit n un entier non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $u : E \longrightarrow \mathbb{R}_1[X], P \longmapsto P(0)X + P(1)$

1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}_1[X])$

2) Montrer que $E = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u)$

⋆

Exercice 10

Soit E un un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque. Montrer que u et s commutent si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$ sont stables par u.

⋆ ⋆

Exercice 11

E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \geq 1$ et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que $n - \text{tr}(s)$ est un entier pair.

⋆ ⋆

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs tels que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.
On pose $r = p + q - p \circ q$.

1) Montrer que r est un projecteur.

2) Montrer que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ et que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

⋆ ⋆

Exercice 13

Soient $p, n \geq 1$ deux entiers, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $g \circ f$ est un projecteur de rang p.

1) Montrer que $\text{rg}(g) \leq p$

2) En déduire que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$ et que $\text{Ker} g = \{0\}$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $g(f(g(x))) = g(x)$

4) Montrer que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient a et b deux symétries de E.

1) Développer et simplifier $(a + b) \circ (a - b)$ et $(a - b) \circ (a + b)$.

2) Montrer que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) \subset \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$

3) Montrer enfin que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) = \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$.

Exercice 15

Soit $n \geq 1$ un entier.

1) Montrer que $s : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(1-X)$ est une symétrie.
2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les deux assertions suivante sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(1-x) = P(x)$
   (ii) la courbe représentative de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$
3) Montrer que $P \in \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ si et seulement si le polynôme $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ définit une fonction paire.
4) Montrer qu'une fonction polynôme est paire si et seulement si tous ses termes de degré impair sont nuls.
5) Vérifier que $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+\frac{1}{2})$ est un automorphisme et en déduire une base de $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$
6) En raisonnant de façon analogue, déterminer une base de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$

Exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = \operatorname{Id}_E$
(ii) $s \neq \operatorname{Id}_E$
(iii) $s \neq -\operatorname{Id}_E$

On considère l'application φ définie par $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), f \mapsto \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff f(E_1) \subset E_{-1} \quad \text{et} \quad f(E_{-1}) \subset E_1$$

4) Soit λ une valeur propre de φ. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $x \in E_1$. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.
5) Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
6) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3 tel que $P(\varphi) = 0$.